REDIMAT

Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press

www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

Trayectorias Iniciales de Formación de Profesores. El Caso de las Transformaciones Geométricas

Xhevdet Thaqi[1] y Joaquim Giménez[2]

1) University of Prishtina, Republic of Kosovo.
2) University of Barcelona, Spain

Date of publication: October 24th, 2014
Edition period: October 2014-February 2015

To cite this article: Thaqi, X. & Giménez, J. (2014). Trayectorias iniciales de formación de profesores. El caso de las transformaciones geométricas. *REDIMAT*, *Vol 3*(3), 253-275. doi: 10.4471/redimat.2014.53

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2014.53

REDIMAT, Vol. 3 No. 3 October 2014 pp. 253-275

Early Trajectories in Pre-service Teachers' Training. The case of Geometric Transformations

Xhevdet Thaqi
University of Prishtina

Joaquim Giménez
University of Barcelona

(*Received: 22 September 2014; Accepted: 14 October 2014; Published: 24 October 2014)*

Abstract

It is developed an empirical study with students – prospective primary teachers, in two different contexts: Spain and Kosovo. It is used a didactical practice on learning to teach geometric transformations in primary school to construct narratives of students about their experience of learning to teach geometric transformations. The study revealed that in the two groups of participants of research there are various cultural scripts for learning to teach geometric transformations.

Keywords: Geometric transformation, teacher training, elementary, mathematics education

2014 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2014.53

REDIMAT, Vol. 3 No. 3 Octubre 2014 pp. 253-275

Trayectorias Iniciales de Formación de Profesores. El Caso de las Transformaciones Geométricas

Xhevdet Thaqi
University of Prishtina

Joaquim Giménez
University of Barcelona

(*Recibido: 22 Septiembre 2013; Aceptado: 14 octubre 2014; Publicado: 24 Octubre 2014)*

Resumen

Se desarrolla un estudio empírico con los estudiantes para futuros profesores de primaria en dos contextos diferentes, en España y Kosovo. Se ha empleado una práctica didáctica sobre aprender a enseñar las transformaciones geométricas en educación primaria para construir narrativas de los estudiantes sobre su experiencia de aprender a enseñar las transformaciones geométricas. El estudio reveló que existen diversas escrituras culturales para el aprender a enseñar las transformaciones geométricas en los dos grupos de participantes de la investigación.

Palabras clave: Transformación geométrica, formación de profesores, primaria, educación matemática

2014 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2014.53

Un desafío del nuevo Espacio Europeo de Educación Superior en lo que respecta a la formación de docentes es reducir al mínimo las diferencias internacionales, ante los procesos de inmigración, intercambio y globalización para poder comprender como se desarrollan practicas matemáticas culturalmente situadas (Pepin, 2000; Llinares y Krainer 2006; Andrews, 2009), usando y comparando escritos en diferentes países (Stigler et al, 2000) para reconocer como son los inicios de trayectorias de formación (Gravemeijer, 2003; Burgués y Giménez, 2006) en culturas diferentes. Así, en este artículo, analizamos los inicios de buenas prácticas situadas de enseñar transformaciones en un marco de construcción del contexto de intercambio didáctico inclusivo entre dos países diferentes del Este y Oeste de Europa: Kosova y España. Uno de los objetivos adyacentes, es que se establezcan puentes de referencia investigadora colaborativa (Jaworski, 2006). Se escoge el contenido geométrico, como paradigmático porque es una preocupación evidente en el proceso de construcción europea, ya que sabemos que en estudios comparativos de culturas este-oeste se basan en la tradición didáctica confuciana y socrática respectivamente (Tweed & Lehman, 2002). Consideramos como hipótesis inicial del trabajo, que las maneras de conceptualización y presentación de las matemáticas son diferentes en países de diferentes culturas y eso tiene consecuencias en los procesos de globalización de construcciones curriculares internacionales. En efecto, en la tradición francesa se dan formas de trabajo geométrico basados en tradiciones occidentales desde la perspectiva natural (Andrews, 2009) que contrastan con las perspectivas soviéticas o alemanas en las que se da la geometría natural axiomática (en el sentido expresado por Girnat, 2008). La investigación reciente en educación matemática muestra que la ausencia de confianza y conocimiento en matemáticas del alumnado son factores que influyen en los logros del alumnado, en cuanto a las transformaciones geométricas (Leung et al. 2008) en diversos países. Sabemos también que los futuros docentes tienen dificultades con las transformaciones geométricas (Pawlik, 2004) y éste es un objeto matemático importante que forma parte de los currículos de todos los países. En ese cuadro contextual, nos interesamos en reconocer qué influencias pueden tener las formaciones culturalmente diferentes en países con tradición de estudio geométrico diferente sobre la imagen conceptual sobre transformación geométrica que posen los futuros profesores de primaria como primeras prácticas profesionales antes de desarrollar actividades específicas sobre transformaciones.

Formación Inicial de Docentes y Transformaciones Geométricas

Si bien hay varias investigaciones sobre el conocimiento y uso de transformaciones geométricas en la escuela secundaria (Hoyos, 2006) hay muchas menos que analizan lo que ocurre en la educación primaria (Pawlik,2004). Existe la hipótesis de que las dificultades en la conceptualización de los estudiantes de Primaria (Wilford, 1972) proviene de un escaso conocimiento de los docentes (Law, 1991 citado por Yanik & Flores 2009). Los futuros docentes de Primaria tienen dificultades en la determinación: (1) de la transformación correcta y el movimiento que transforma un punto en otro; así como (2) los resultados de transformaciones que sobre figuras combinadas (Desmond, 1997), o acciones que necesitan de inputs específicos o con parámetros prototípicos (Edwards & Zazkis, 1993).

Los futuros docentes encuentran dificultades con las simetrías y otras transformaciones (Jaime y Gutierrez, 1995) y en un contexto tecnológico se ha visto que tienen expresiones lingüísticas débiles cuando trabajan sobre transformaciones (Harper, 2003) y les cuesta conseguir una visión dinámica de la transformación. En este y otros estudios precedentes, se indica que existe una secuencia en el desarrollo del pensamiento sobre transformaciones y otras transformaciones rígidas (1) transformaciones comprendidas como movimientos indefinidos de un objeto simple, (2) transformaciones como movimientos definidos de un objeto simple, y (3) transformaciones vistas como movimientos de todos los puntos del plano (Yanik & Flores, 2009).

En nuestra investigación tratamos de centrar el objetivo de analizar las diferencias culturales encontradas en el proceso de aprender a enseñar las transformaciones geométricas entre dos países diferentes – la de Catalunya y la de Kosovo, ante dicha problemática y constatar o conjeturar hasta qué punto las personas que han vivido tradiciones diferentes tienen respuestas semejantes o diferentes. Una primera aproximación a este análisis, se sitúa en la consideración de tradiciones curriculares diferentes. En efecto, la tradición matemática mira la geometría de las transformaciones con las características de Klein. Sólo algún acercamiento, como el currículo francés muestra las isometrías en general y la simetría en particular como transformaciones, Incluso teniendo en cuenta que el término "transformación" se menciona solo al final de la escuela secundaria. En cambio, en la tradición escolar en muchos países latinos (como España e Italia), el lenguaje de las transformaciones se asocia a simples cambios naturales empíricos, observando sus propiedades sólo en el marco de la geometría analítica, y a partir de los 15 años (Bulf, 2008). En países del Este con Francia y Alemania con las tradiciones más axiomáticas, no parecen resolver la transición entre la visión natural propia de la escuela primaria y la secundaria (como se explica en el análisis de Kuzniak y Vivier -2008- observando el caso comparativo de Grecia y Francia).

Nos parece de gran interés analizar qué significados iniciales otorgan los futuros profesores de primaria en cuanto si reconocen el valor dinámico de las transformaciones en general, y las isometrías en particular, frente a lo que pensamos que es una concepción curricular estática, tradicional en los currículos recientes. Nos interesa especialmente interpretar los resultados como manifestaciones de las atribuciones de significado que dan los futuros docentes al inicio de su trayectoria de aprendizaje sobre transformaciones geométricas.

Bases Metodológicas del Estudio entre Kosovo y España

Se muestra una investigación etnográfica, con estudio de caso con dos grupos de futuros docentes. El estudio presentado aquí forma parte de un trabajo más amplio (Thaqi, 2009) en el que, se consideran dos tipos de datos previos: (a) estudio de los marcos institucionales dados por los currículos, análisis de libros de texto y propuestas comparadas de formación de docentes (b) respuestas al cuestionario inicial realizado con los dos grupos de estudiantes.

Para la primera parte, se consideran las propuestas curriculares anteriores a la recentísima reforma curricular realizada durante la independencia de Kosovo, que nos permite reconocer culturas diferentes establecidas en ambas comunidades. Se escogen libros de texto de ambos países para los análisis comparativos de contenido y atribuciones de significado. Se considera un análisis de significados propuestos en la construcción de prototipos (o no) a partir de los textos como se hace en los estudios médicos y de marketing (Lefèvre & Lefèvre, 2000). El análisis pormenorizado de esta primera parte, no se detalla en este artículo.

Para la segunda parte, se analizan los resultados de respuestas a una actividad profesional inicial con una muestra de 13 futuros docentes de Primaria en 2º año de la Universidad de Barcelona (UB) en Cataluña/España, que tienen una única asignatura de matemáticas en su formación y 15 futuros profesores de primaria en la Facultad de Educación de la Universidad de Prishtina - (UP) en Kosovo que han cursado dos asignaturas de formación geométrica euclidiana clásica pero muy poca formación didáctica. Todos los estudiantes tienen entre 18 y 22 años de edad.

Para analizar el tratamiento del contenido matemático de transformación geométrica en la formación de los futuros profesores de primaria en el caso de Kosovo, hemos considerado los materiales de la Facultad de Educación de la Universidad de Prishtina y sobre el caso de Catalunya/España al programa presentado dentro del proyecto EDUMAT Matemáticas y su Didáctica para maestros (Godino y Ruiz, 2003).

Para reconocer las significaciones iniciales de los futuros profesores, se decide que una primera práctica profesional se basa en responder a un cuestionario semiestructurado que se diseña con catorce preguntas (en su mayoría contextualizadas) de respuesta abierta escrita que se analizarán en cuanto la terminología, propiedades y transformación como cambio (tabla 1).

Tabla 1

Grupos de preguntas en el cuestionario sobre significados de transformación

Aspecto del significado de transformación geométrica	Actividades que lo identifican
Terminología. Tipos.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 14
Propiedades. Relaciones y jerarquías	1, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 14
Transformación como proceso o cambio	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12

A estas preguntas se añaden otras para identificar su capacidad de razonar describiendo el fenómeno de transformación, la integración de los elementos culturales al significado de transformación, la capacidad en tener en cuenta el aprendizaje de transformación, y por último, una pregunta sobre lo qué piensan los estudiantes en sus futuras aulas sobre las formas, estilos y los elementos curriculares, respecto a las transformaciones geométricas.

El análisis de esta segunda parte, se hace sobre la base de las respuestas individuales aportadas, que se contrastarán en momentos sucesivos de formación en los que se pretende reconocer su posicionamiento frente los objetos matemáticos en cuanto objeto cultural (Stigler, Gallimore y Hiebert, 2000). El propósito es buscar patrones y crear descripciones del desarrollo del conocimiento matemático en un proceso de formación a lo largo del tiempo, viendo los posibles condicionantes institucionales como inicio de una trayectoria hipotética de formación (Burgués y Gimenez, 2006). Para el análisis que mostramos a continuación, se decide sistematizar el proceso en base a dos componentes: (a) supuesto inicial de significados institucionales en el contexto cultural, (b) análisis epistémico-cognitivo.

Resultados de un Primer Análisis Comparativo de lo Institucional

El análisis de la componente institucional, para establecer comparaciones, lo agrupamos en tres partes: (a) las transformaciones y currículum en Primaria, (b) análisis de significados en los libros texto escolares, (c) observaciones sobre las transformaciones en currículos de formación docente.

Sobre el Análisis Comparado de Currículos.

Al analizar los currículos escolares de Catalunya y Kosovo, se encuentran resumidamente presentadas en la Tabla 2 un conjunto de elementos comunes y distinciones en lo que respecta a lo que debe trabajarse sobre transformaciones geométricas en la educación Primaria.

En el currículo de Educación Primaria en Kosovo, se explicita una distinción entre la idea de construir y transformar, y eso también se observará como característico en los textos escolares. Al analizar los textos escolares habituales, se observa que realmente las diferencias y semejanzas curriculares se mantienen y no se proponen actividades de razonamiento más allá de simples constataciones. Mientras que el currículo oficial de Catalunya pide que en Primaria los alumnos deban "… reconocer giros, y realizar sombras, simetrías y giros...”, que deben “reconocer objeto que ha generado una sombra determinada”, que deben “identificar la transformación que relaciona dos figuras dadas…“etc., no es habitual ver ninguna actividad que permitiría el desarrollo y comprensión de estos conocimientos y capacidades.

Tabla 2
Aspectos curriculares comunes y distintos sobre transformaciones geométricas

Elementos comunes	
Se Idea una idea estática de transformación geométrica, identificando diferentes tipos de isometrías Se enfatiza el uso del contexto en la construcción del significado de transformación, utilizando modelos y situaciones del entorno.	
Aspectos específicos en Kosovo	*Aspectos específicos en España*
Relaciones entre isometrías y propiedades identificando, reconociendo y estableciendo la relación (transformación) entre dos figuras dadas, construyendo la figura congruente con la figura dada en relación de una isometría. La transformación se construye describiendo y clasificando cambios de posiciones. Se enfatiza qué es necesario construir el simétrico de una figura dada. Se enfatiza qué debe verse el razonamiento deductivo durante el proceso de construcción del concepto de transformación geométrica, requiriendo que se demuestre la verdad de las conclusiones como las regularidades de las figuras a partir de las simetrías.	Incluye la composición y descomposición de figuras en el análisis sobre proyecciones. Se interpreta la transformación como una operación, realizando transformaciones de figuras de forma manipulativa y reconocimiento del objeto que ha generado una sombra determinada o del reconocimiento de los giros y de las simetrías complejas.

Y en cambio según el currículo oficial de Kosovo, los alumnos de primaria deben enseñar sobre “construir la figura congruente con la figura dada en relación de simetría, rotación y traslación”, sobre “reconocer, describir, clasificar, nombrar y definir diferentes cambios de posiciones de figuras…”, sobre “construcción de mediatriz, bisectrices, y regularidades de figuras a partir de simetrías…”. Aunque hay contenidos sobre las simetrías, esto se hace solo en sentido aislado y no se usa en otros temas como propiedades del polígono regular, no se utiliza la propiedad de simetría para clasificar las figuras según que tengan dos, uno o ningún eje de simetría. No se tratan las figuras simétricas que admiten un giro de “media vuelta” (por ejemplo la letra S).

Comparación de Significados en Textos Escolares.

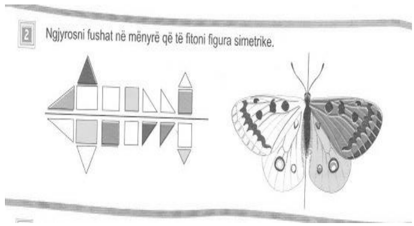
En los materiales kosovares se analizan inmediatamente propiedades, se acentúa el uso de términos matemáticos precisos y en cambió en los catalanes se reconocen procesos de visualización. En cuanto al uso de elementos mediacionales, en ambos casos se alude al papel cuadriculado como forma más simple de ejecución. Se privilegian los contextos de acción de objetos pequeños, juegos o animales, por encima de la observación de lo real-social, aunque recientemente algunas ediciones plantean más objetos reales del mesoespacio. Los contextos reales están más presentes en la publicación catalana, que utiliza un lenguaje más coloquial en muchas actividades. La búsqueda de ejes de simetría es el elemento común más evidente (figura 1). En el texto catalán se pone un mayor énfasis en aspectos que relacionan el contenido con la realidad.

Libro de texto en España	Libro de texto en Kosova
Página 68, / Actividad 1/ “*1. Necesitas una hoja de papel y pintura* *2. Toma una hoja y dóblala por la mitad* *3. Abre la hoja, moja la punta del dedo con pintura y haz un dibujo como el de la ilustración en una de las mitades que te han quedado.*	Pag. 35 /Actividad 1’/ Simetría y eje de simetría “*pintar partes de figuras para obtener las figuras simétricas”* (no hay ninguna explicación de cómo desarrollar la actividad. Todo se deja en la responsabilidad de profesor)

<table>
<tr><th>Libro de texto en España</th><th>Libro de texto en Kosova</th></tr>
<tr><td>

4. Ahora, <u>dobla</u> la hoja haciendo que las <u>puntas coincidan</u>
5. Aprieta un ratito, abre la hoja y ..ya tienes la mariposa! “

</td><td>



</td></tr>
</table>

Figura 1. Ejemplo de tareas de transformación en textos escolares de España y Kosovo.

En ejemplos como la figura 1, reconocemos que las diferencias culturales no solo se dan en el terreno del contexto, sino en la forma de presentar y valorar el contenido matemático. Así por ejemplo, en los textos de Kosovo se enfatiza la construcción del simétrico, y en España se insiste en la acción y la observación de figuras simétricas. En este y otros ejemplos observados en los textos Kosovares, constatamos que la simetría como transformación forma parte de la cultura específica de origen soviético.

Sobre el Tratamiento de Transformaciones en Materiales de Formación

El programa de geometría en la Universidad de Prishtina (UP), opta por un modelo de enseñanza formativa, y plantea los contenidos como un conjunto de conocimientos y procedimientos. Asimismo, se procura que se resalten los aspectos inductivos y constructivos del conocimiento geométrico, y no sólo los aspectos deductivos de la organización formalizada que le caracteriza como producto final. Ejemplo: "Transformación simétrica de la figura F respecto la recta s llamamos aplicación (función) S(s) con las propiedades: si X€F y X€s (X€F∩s), entonces X'=S(s) (X)=X, y para cualquier otro punto X€F (X€F\s) y de su transformación X'=S(s), la recta s es mediatriz del segmento XX' (pp. 169)

O sobre la demostración del teorema que afirma "el segmento que une dos puntos cualesquiera de una figura es congruente con el segmento que une sus imágenes simétricos" se observa que para justificar su demostración se cita el Teorema que demuestra la congruencia de dos triángulos (lado-ángulo-lado) y del concepto fundamental de la congruencia. Este proceso se puede seguir hasta encontrar todas las justificaciones que se precisan utilizar, directa o indirectamente, en la demostración.

En el programa de EDUMAT (España) el objetivo principal de la enseñanza de las transformaciones geometría es el saber informativo. Se ha procurado plasmar en la secuenciación principios generales tendentes a conceder prioridad al trabajo práctico e intuitivo (definiciones de los conceptos de punto, recta y plano, de relaciones concurrente, colineal, paralelismo, etc., pp. 459). Por tanto, el programa de "EDUMAT" refleja el proceso constructivo del conocimiento matemático (los cuadriláteros y su clasificación: "…para clasificar los cuadriláteros hay que estudiar las características comunes que tienen estas figuras, lo que dependerá a su vez de los criterios o variables que observemos…" (p. 468) tanto en su progreso histórico como en la individualización del mismo por parte de los futuros profesores. Con todo, hemos constatado otros programas de formación en los que parece conformarse con la visión intuitiva del contenido matemático.

Resultados sobre un Análisis Epistémico-Cognitivo

Basándonos en las respuestas dadas por los estudiantes de ambos países al cuestionario propuesto, subdividiremos los resultados en tres apartados: (a) los que se refieren al uso de terminología, expresiones de objeto transformación y asociación de ejemplos y tipos; (b) respecto la caracterización de propiedades y razonamientos asociados; (c) sobre representaciones asociadas a la idea de transformación. Estos tres elementos forman parte de lo que denominaremos análisis de la configuración inicial de la trayectoria de formación.

Terminología y Ejemplos

Sólo algún estudiante del grupo de UP, muestra confusiones terminológicas importantes como por ejemplo llamar rotaciones a las simetrías. En efecto, en problemas como el que se pide reconocer las transformaciones que se encuentran en bordados, no siempre se dan las explicaciones necesarias sobre la relación entre la rotación y la simetría axial. Es el caso de Vj (UP) que indica "…en una hoja dibujaran la parte de la figura la cual la giraran para que se obtiene la imagen entero. Así se vera la rotación" (Vj, A5:3, UP). El estudiante identifica la rotación a base de la intuición de obtener la imagen del bordado que determina el hecho de girar la parte generadora (mediante la expresión "a través de". En otros casos, se interpreta las isometrías como desplazamientos, que pueden ser "rotación" o "traslación": "…y en este caso tenemos también desplazamiento, donde a través desplazamientos se obtiene todo la figura." (Fi, A6, :p3, UP).

A partir de las respuestas dadas, asignamos cuatro categorías que nos permiten valorar grados de conocimiento (en el sentido de la construcción más o menos profunda de imágenes en el sentido de Tall y Vinner, 1991) en cuanto consideran la idea de transformación como objeto matemático f que a una figura A transforma en la figura B donde f(A)=B, con mayor o menor profundidad en la justificación/argumentación de sus textos en cuanto los términos, ejemplos, propiedades y relaciones de contenido asociadas.

En base a las observaciones realizadas (visibles en la tabla 3), podemos evidenciar que en ambos grupos no encontramos los estudiantes con el grado alto de conocimientos sobre el objeto de transformación. La mayoría del grupo UP se considera en la franja intermedia (64%), y menos de la mitad (46%) en la UB.

Para los estudiantes de UB, la transformación se asocia mayoritariamente al sentido común de la palabra como relación entre un objeto y su transformado, con el cambio de alguna característica (*undefined motion* en el trabajo de Yanik y Flores, 2009). El cambio de posición no es siempre la característica de transformación del objeto.

Tabla 3

Comparación de resultados de análisis sobre objeto transformación, terminología y tipos

Grados de conocimientos sobre **objeto transformación, terminología y tipos**		UP n=15	UB N=13
A)	Estudiantes capaces de construir imágenes conceptuales completas utilizando una terminología y justificando las interpretaciones de esa imagen mediante afirmaciones correctas.	0%	0%
B)	Muestra imágenes conceptuales formadas por unos *pocos ejemplos prototípicos* que incluyen alguna *propiedad matemática* relevante que se corresponda. Identifica la transformación de la figura sin explicar la transformación de sus elementos e identifica alguna propiedad relevante de la transformación.	64%	46%
C)	No hay respuesta o no aporta elementos significativos sobre terminología y conceptos de transformaciones.. Estudiantes con las imágenes conceptuales más pobres, formadas por unos pocos ejemplos prototípicos y propiedades de tipo visual.	36%	54%
O)	Respuestas en blanco o no significativas a nuestros propósitos.	--	--

Al analizar cualitativamente las respuestas de los estudiantes de UP, sólo dos estudiantes muestran un intento de expresar el concepto de transformación como función. En efecto, se observa en las respuestas de las actividades 1, 5 y 6 como algunos estudiantes identifican las dos partes que se repiten sin mostrar elementos constituyentes, por ejemplo, el eje de dicha simetría: “es el cuadrado que se repite y si lo giramos obtenemos todo el mosaico….estas transformaciones llamamos simetrías axiales.” (Ar, A6, p6, UP). Pocos estudiantes son capaces de dar propiedades usuales de las transformaciones. Tal es el caso de usar la idea de rotación que se reproduce con período 2π: “en manera matemática, la rotación de la puerta se vuelve en forma inicial después de una rotación con periodo T=2π” (Pe, A2, p 4, UP). Se utiliza el concepto “rotación” sin explicar los elementos

que la definen. El estudiante Pe intenta razonar inductivamente que la puerta hace una rotación, y por esta razón, la puerta se vuelve en la posición inicial después de girar por un ángulo de 360 grados, utilizando simbólicamente la expresión T=2π. Quedan sin saber qué significa T, cuál es eje de rotación, cuándo se puede entrar y cuándo no se puede, etc.
En ambos grupos, se asimila la isometría como desplazamiento físico y cambio de posición con igualdad de forma y tamaño, mientras que la transformación se identifica más como cambio de forma (Tabla 4). En la Tabla 4, mostramos como son las respuestas cuando se pidió poner un enunciado para dar un sentido a la rotación.

Tabla 4
Respuestas comparadas de estudiantes a la idea de rotación

Respuestas en Kosova (FEUP)	Respuestas en Catalunya (FFPUB)
Ad *... cuando giramos las hojas de un libro obtenemos en posiciones diferentes…”,*	***Li-*** *cuando se mueve el objeto es gracias a nuestra fuerza contra el objeto y este resbala y paralelamente se mueve …*
Ar*…el movimiento de lápiz….girándolo*	***Al.-*** *es la propiedad de hacer rodar un objeto haciendo el material circular*
Dr*…el movimiento de las agujas del reloj…”*	**Yo**- *la propiedad que los objetos cilíndricos tienen para moverse, rodar*
Da*… la obertura de la ventana o de la puerta*	

Sólo algunos estudiantes del UP caracterizan además los movimientos (isometrías) como invariancia de forma y tamaño, cuando hablan de comparar transformación y movimiento.

> Ar- (transformación y movimiento) no (es lo mismo) porque la transformación quiere decir una cosa se transforma en otra cosa mientras con el movimiento entendemos cambio de posición de una misma cosa.
> Dr- El movimiento es desplazamiento de una cosa de un lugar en otro que es una transformación.

Pero, pocos hablan explícitamente de las isometrías como conjunto de transformaciones que conservan el tamaño y la forma. Como es el caso de Da, cuando dice: "si, es lo mismo porque una figura pasa de un lugar en otro, sin cambiar la forma y magnitud que es una transformación" (Da, p4: 3-5, UP).

Sí en cambio en el grupo de UB se identifican las simetrías, rotaciones y traslaciones como transformaciones con dicha propiedad. Ahora bien, en algún caso, la actividad hace que lo intuitivo pase por delante del conocimiento estructurado. Así, ante la observación de un bordado, algunos estudiantes muestran la rotación como la única isometría, puesto que la identifican como la única transformación que actúa sobre el módulo que han marcado:

> "…Yo por movimiento entiendo coger cualquier objeto o imagen y desplazar de sitio, pero sin que por ello el objeto sufra alteración. (Mc, p3: 2-3,UB)

También hemos observado que la mayoría de estudiantes de UB (11 de total de 13) piensan que un movimiento rígido no es una transformación, manteniendo la idea que transformar se asocia a un cambio más radical.

Sobre la Caracterización de Propiedades.

A partir de las observaciones, podemos decir que la imagen conceptual de transformación geométrica está construida en base a propiedades de tipo visual (transformar=deformar), y movimiento isométrico = desplazamiento. En el caso del significado de semejanza en la UB, se asocia al fenómeno que establece una relación entre dos objetos parecidos en el sentido general:

> Al- un ejemplo de semejanza puede ser la obertura de una mandarina o una naranja ya que pueden parecer de partes iguales pero no lo son.
>
> Es- ejemplo de similitud son las partes del cuerpo humano (manos, piernas, ojos…) La- se pueden observar los zapatos y ves que no son iguales, sobre todo si no son nuevas.

Y pocos explicitan su significado, de forma más genérica, aunque no aluden a propiedades: cuando dicen "…que es cuando una cosa se parece mucho a otra pero no es la misma…" (Li, p5:3, UB). Aunque algunos saben que existen dichas características, reconocen que no las saben decir, como Jo: “no conozco las propiedades de semejanza (homotecia)”. (Jo, p5:2, UB)

Pocos estudiantes reconocen explícitamente los elementos que caracterizan (propiedades) cada tipo de isometría. En el caso de las simetrías, se describen: el eje, las formas reales asociadas, etc. Muy pocos estudiantes se refieren a propiedades como el cambio de sentido. No se dan propiedades características de la traslación. Y de las rotaciones se alude sólo a los ángulos, pero no a la conservación de la distancia En algunos casos la transformación se ve como aplicación de un conjunto en el otro, pero no se identifica esta aplicación entre posiciones del objeto en dos lugares diferentes. Esto se explica con las figuras simétricas, porque se establece fácilmente la correspondencia entre las dos partes de la figura u objeto. Sin embargo, para otros tipos de transformaciones, habría que imaginar la posición inicial y final de la figura transformada para poder establecer la idea de transformación como aplicación.

Algunos estudiantes kosovares (grupo UP) afirman adecuadamente que el movimiento es sólo un tipo de transformación geométrica. Que es así, nos convencimos si analizamos las respuestas del problema 12 donde se pide explicar la transformación de la figura A en la figura B, cuando Ad lo explica utilizando transformación de los conjuntos de puntos de la figura A en los correspondientes puntos de la figura B. La estudiante Sh por ejemplo, establece una relación correcta entre la propiedad de conservación del tamaño y forma en las transformaciones isométricas: en la pregunta “como se llaman transformaciones que conservan forma y tamaño...” responde “simetría, traslación, rotación”.

En el grupo UB, solo un estudiante habla de isometrías como transformación que conserva la forma y el tamaño mientras otros las identifican como repeticiones. Y en general no se identifica la simetría en dicho conjunto. En realidad, algunos estudiantes aluden a casos particulares de isometrías como regla general. Así, algunos llaman a dicha transformación que conserva forma y tamaño: traslación (Al), rotación (Di) rotación y traslación (Li), simetría (Mc).

La mayoría de los estudiantes de ambos países, no poseen imágenes completas de transformación y sus tipos como función, y dan imágenes y propiedades figúrales diferentes en cada tarea. Así, el plegado de papel es la forma habitual de evocar el cambio de sentido en la simetría (figura 2a).

Y el dibujo es la forma habitual de representar la semejanza, con la ayuda de los rayos que salen de un punto del plano (figura 2c), aunque se asocia habitualmente a la idea de proyección (figura 2b el caso de Ar). Sólo Vj., del grupo UP identifica la semejanza como dependencia funcional, mediante intersecciones cónicas (fig.2c)

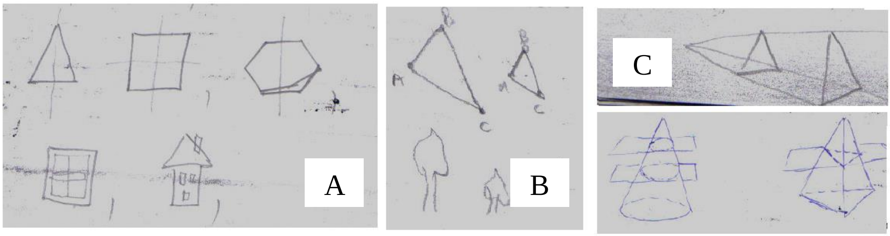


Figura 2. Ejemplos propuestos sobre simetría y semejanza.

La mayor parte de los estudiantes no indican características de la proyección como transformación. En muchos casos, en ambos países, se reconocen ejemplos asociados a las semejanzas, sin que se muestren todas sus características. Sólo alguno evoca la semejanza como aplicación de puntos del plano. La semejanza se interpreta en UP como diferencia de tamaño (figura 2b), conservando la forma; no así en UB, donde la semejanza fundamentalmente se reduce a parecido. En efecto, ante el problema 10, sólo 5 estudiantes de la UP, consiguen responder correctamente sobre la proyección y dar una descripción asociada al fenómeno de la luz y las sombras: “la sombra será diferente del cuerpo humano” y identifica los elementos de proyección: “…la (fuente de la) luz se considera el centro de la proyección y las rayas de la luz se consideran las rectas de proyección.” (Ar, p10: 7, UP)

Usualmente no hay una descripción explícita de la relación entre elementos y propiedades de la proyección que evidencien la noción de transformación como función, excepto el caso superficial siguiente. “…la sombra es la transformación del cuerpo humano…” (Fit, p9:5, UP).

En algunos casos, como es del problema 10 vemos que 6 participantes del UB muestran la capacidad de identificar la relación entre la fuente de la luz, el objeto, su sombra y el plano donde se aparece la sombra: “…porque las sombras crecen cuando un foco de luz incide sobre un cuerpo y éste se proyecta en un fondo opaco. Si no tendríamos un foco de luz ni un fondo opaco, no tendríamos sombra. Dependería también desde donde nos incidiera el foco, ya que si lo hiciere perpendicularmente a nuestra cabeza, es decir, en el eje de la cabeza no proyectaría ninguna sombra." (Di, p10: 7, UB).

Y en algún caso del grupo UP se identifica el detalle de la escalera como forma de explicitar el cambio de la sombra cuando la forma donde se proyecta no es plana: "La sombra del cuerpo humano en la escalera parece rota según las escaleras, ya que la sombre es plana mientras que el cuerpo es tridimensional". (Vj, p10: 3-6, UP).

La Vj, nos muestra la identificación correcta de la propiedad del producto de proyección – la sombra, que depende del lugar donde se presenta: si es "escalera parece rota" en contrario del sí es plano; pero no identifica otros elementos de la proyección. Sólo en algún caso del grupo UP, como el de Ad, se identifican los elementos de la transformación: el centro, las rayas y el objeto transformado: "la sombra, que depende del lugar donde se presenta, si "escalera parece rota" en contrario es plano; (Ad p10, 4, UP).

En el caso de la UB, algunos estudiantes identifican la transformación como relación entre dos estados diferentes de un objeto y lo usan para decir que las proyecciones no son transformaciones: "No creo que haya alguna transformación porque el objeto que refleja sigue la misma gente", (Li, p10, 3, UB).

La misma estudiante, al hablar de los objetos arquitectónicos usa la idea de transformación en el sentido de relación entre estados diferentes del objeto: "A partir de un objeto cualquiera maleable y aplicando diferentes fuerzas y trabajándolas con materias conseguimos que un objeto cambie de forma, aunque el material sea el mismo. Se pueden trabajar transformaciones con la madera estando de una forma inicial cuadrada a una redonda." (Li p.11: 4-8, UB).

En el caso del grupo UB, algunos estudiantes ven la transformación como un cambio "radical" del objeto. Tal es el caso de entender que las proyecciones son transformaciones que cambian la forma del objeto transformado: "… decimos que se trabajan proyecciones porque las formas cambian" (Al p10, 4, UB).

Ningún estudiante de los dos grupos identifica correctamente la dependencia funcional entre elementos de proyección. Las inconsistencias se muestran en verbalizaciones en donde la reconoce que la sombra es la transformación del cuerpo: “Toda sombra es proyección porque proyecta/refleja el cuerpo de la persona”. (So, p10: 3, UB).

Muchos de ellos no identifican los elementos de proyección (grado C de respuesta) como por ejemplo el centro de proyección, la alineación de los rayos de proyección y otras propiedades de proyección. Por ejemplo Al no nos pone otras propiedades de proyecciones. La respuesta de Ol en el mismo problema muestra la identificación de la proyección con deformación: “…trabajar con sombras decimos que se trabaja con proyecciones porque se producen deformaciones de las figuras. Se proyecta una imagen partiendo de otra, como seria de los proyectores. La imagen proyectada sufre una deformación, se amplía o reduce”. (Ol, p10:9, UB).

También Li cree que las proyecciones no son transformaciones, pero al responder al problema 11 muestra un sentido más amplio de transformación: “A partir de un objeto cualquiera maleable y aplicando diferentes fuerzas y trabajándolas con materias conseguimos que un objeto cambie de forma, aunque el material sea el mismo. Se pueden trabajar transformaciones con la madera estando de una forma inicial cuadrada a una redonda.” (Li, p10:7, UB).

Observamos muchos estudiantes con un conocimiento muy pobre sobre el concepto de transformación en general y de proyección en particular; lo que quiere decir que Na no cuenta las proyecciones como transformaciones, y además no distingue la relación entre la imagen y la sombra diciendo que “las sombras son proyecciones de una imagen”: ”…no hay transformación. Las sombras son las proyecciones de una imagen, gracias a un foco de luz” (Na, p10; 4, UB).

Sobre Representaciones de las Transformaciones

Las representaciones y visualizaciones de transformaciones no isométricas no parecen ser suficientes para reconocer dichas transformaciones por los estudiantes de UP. Hay respuestas más consolidadas en el grupo UB. Así, en el problema 13 solo un estudiante responde en UP y en el problema 14 solo aparecen 6 respuestas correctas. Es decir, no son capaces de identificar las transformaciones isoperimétricas. Muy pocos reconocen las deformaciones como transformaciones. Cuando se reconocen, las imágenes conceptuales están formadas por unos pocos ejemplos prototípicos y propiedades de tipo visual – que basan sus juicios en la apariencia visual de esos prototipos, comparándolos con las figuras sobre las que deben trabajar y rechazando como ejemplos aquellas figuras que no coinciden con los prototipos de su imagen del concepto. Así, Da dice que: “la transformación que convierte un rectángulo de 3X7 cm hecho con una cuerda de 20 cm en otro rectángulo diferente con la misma cuerda que tiene medidas diferentes es conservación del perímetro y del área”. (Da, p14: 5, UP).

Conclusión

El nivel bajo de conocimientos sobre transformaciones geométricas en el cuestionario Inicial en los dos países, muestra el hecho que a los participantes de la investigación les faltan conocimientos sobre transformaciones desde la educación anterior. Como consecuencia de las ausencias de formación, podemos explicar el hecho de que los participantes de la investigación del grupo UB muestran un grado más alto de conocimientos iníciales sobre proyecciones que los del grupo UP aunque tienen conocimientos más parecidos en otros aspectos del significado de las transformaciones. Con todo, se percibe que la orientación euclidiana del currículo Kosovar, permite indicar que tiene una cultura del contenido más desarrollada que en Catalunya/España.

En ambos países, no se han construido imágenes poderosas sobre los tipos de transformaciones, y menos aún una idea funcional de la transformación. Esto es posible debido a que la representación de una transformación con una notación de la función requiere un pensamiento más abstracto, lo que es crucial para entender las transformaciones como aplicación uno a uno de los puntos del plano.

Ningún estudiante de ambos países, no poseen imágenes completas de transformación y sus tipos como función, y dan imágenes y propiedades figúrales diferentes en cada tarea. Nuestros resultados son coherentes con la dialéctica global/puntual (Bkouche, 1992, Jahn, 1998).

Los resultados parecen mostrar los efectos del escaso tratamiento de una visión Klein-iana de la geometría, en donde se insista en la invariancia como fenómeno. Y cuando se ve alguna relación estructural, es en la idea de isometría. Recordemos que ningún estudiante de los dos grupos identifica correctamente la dependencia funcional entre elementos de proyección. Por todo ello, en nuestro estudio más amplio, hemos considerado una secuencia de formación en donde se trabajara algo más de las transformaciones y procesos de análisis de las invariancias. En este y otros estudios, se muestra el valor de los entornos interactivos para reconocer la fuerza de los invariantes (Harper, 2003) la visión funcional (Hollebrands, 2003) y visualización en el trabajo con transformaciones (Olkun et al., 2009).

References

Andrews, P. (2009). The cultural location of teachers' mathematical knowledge: Another hidden variable in research on mathematical knowledge for teaching? In M. Joubert (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (pp. 99-118). Retrieved from: www.maths-ed.org.uk/mkit/Andrews_MKiT6.pdf

Bkouche, R. (1992). De la géométrie et des transformations. *Repères IREM*, *4*, 135-158.

Bulf, C. (2008). *Ètude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*. Doctoral dissertation, Université Paris Diderot.

Burges, C., Gimenez, J. (2006). Las trayectorias hipotéticas de formación inicial (TRHIFI) como instrumento para el análisis del desarrollo profesional. En M.C. Penalva, I. Escudero, D. Barba (coords), *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorizacion para la formación del profesorado de matemáticas* (pp. 49-67). Granada: Proyecto Sur.

Desmond, N.S., (1997). *The geometric content knowledge of prospective elementary teachers*. Doctoral dissertation, University of Minnesota.

Edward, L. & Zazkis, R., (1993). Transformation geometry: Naive ideas and formal embodiments. *Journal of computers in mathematics and science teaching, 12*(2), 121-145.

Girnat, B., (2008). The necessity of two different types of applications in elementary geometry. *Proceedings for CERME*. Lyon. Retrieved from: http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg5.pdf

Godino, J. D. y Ruiz, F. (2003). *Geometría y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Retrieved from: http://www.ugr.es/local/jgodino/

Gravemeijer, K., (2003). From a different perspective: building on student´s informal knowledge. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds), *Designing Learning Environments for Developing Understandings of Geometry and Space* (pp. 45-46). Dordrecht: Lawrence Erlbaum Ass.

Harper, J. (2003). Enhancing elementary pre-service teachers' knowledge of geometric transformations through the use of dynamic geometry computer software. In C. Crawford et al. (Eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference* 2003 (pp. 2909-2916). Chesapeake.

Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behaviour, 22*(1), 55-72. doi: 10.1016/S0732-3123(03)00004-X

Hoyos, V. (2006). Functionalities of technological tools in the learning of basic geometrical notions and properties. In C. Hoyles, J-B Lagrange, L.H. Son, and N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of 17th ICMI Study conference, Technology Revisited.* Hanoi: Hanoi University of Technology.

Jahn A.P. (1998). *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-Géomètre – Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde*. Doctoral dissertation, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1995). Guidelines for Teaching Plane Isometries in Secondary School. *The Mathematics Teacher*, *88*(7), 591-597.

Jaworski B. (2006). Theory and Practice in Mathematics Teaching Development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(2), 187-211. doi: 10.1007/s10857-005-1223-z

Kuzniak, A. and Vivier, L. (2008). A French look on the greek geometrical working space at secondary school level (p. 686). *Proceedings of the CERME, working group 6.* Lyon. France.

Lefèvre, F., Lefèvre, A.M.C., Teixeira, J.J.V. (2000). *Discurso do sujeito coletivo: uma nova abordagem metodológica em pesquisa qualitativa*. Caxias do Sul: EDUCS.

Leung, K. C. I. et al. (2008). The competence of potential mathematics teachers of Hong Kong: A comparative perspective. *Discussion Group 14 of the 11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, Mexico.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teachers educators as learners. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook on research in Psychology of Mathematics Educatio*n (pp. 329-459). Rotterdam: Sense Publishers.

Olkun, S. et al (2009). Comparing and Enhancing Spatial Skills of Pre-service Elementary School Teachers in Finland, Taiwan, USA, and Turkey. In *Procedia - Social and Behavioral Sciences Volume 1, Issue 1* (pp. 1545-1548). World Conference on Educational Sciences. Nicosia, North Cyprus.

Pawlik, B. (2004). On false convictions concerning geometric transformations of the plane in mathematics students' reasoning. *Proceedings of the ICME-10*. Copenhague. Retrieved from: www.icme-organisers.dk/tsg10/articulos/Pawlik_30_updated_paper.doc

Pepin, B. (2000). Reconceptualising comparative education: the case of international studies in mathematics education. *Pedagogy, Culture & Society*, *8*(3), 379-388. doi: 10.1080/14681360000200100

Stigler, J. W., Gallimore, R., & Hiebert, J. (2000). Using video surveys to compare classrooms and teaching across cultures: examples and lessons from the TIMSS video Studies. *Educational Psychologist, 35*, 87-100. doi: 10.1207/S15326985EP3502_3

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169. doi: 10.1007/BF00305619

Thaqi, X. (2009). *Aprender a enseñar transformaciones geométricas en Primaria desde una perspectiva cultural*. Doctoral dissertation, Barcelona University. Spain.

Tweed, R. G., & Lehman, D. R. (2002). Learning considered within a cultural context: Confucian and Socratic approaches. *American Psychologist*, *57*, 89-99. doi: 10.1037/0003-066X.57.2.89

Williford, H. J. (1972). A study of transformational geometry instruction in the primary grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, (3), 260-271.

Yanik, H.B., Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 41-57. doi: 10.1016/j.jmathb.2009.04.003

Xhevdet Thaqi is assistant professor of mathematics education, in the Department of Mathematics Education, University of Prishtina, Republic of Kosovo.

Joaquim Gimenez is full professor in the Department of Sciences and Mathematics Education, University of Barcelona, Spain.

Contact Address: Direct correspondence concerning this article, should be addressed to the author. Postal address: Campus Mundet, Edifici de Llevant, planta 1, 08035 Barcelona, Spain. **Email**: xhevdetthaqi@yahoo.ca